电磁感应（II）

1. 由互感的定义

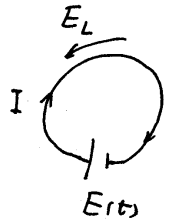
$$\phi_{21} = M_{21} I_1$$

$$\phi_{12} = M_{12} I_2$$

$\because$ $I_1 = I_2$，且互感系数相等 $M_{21} = M_{12}$

所以 $\phi_{21} = \phi_{12}$

2.



①假设电流 I 增加，自感电动势方向与电流方向相反． $E_L = -L\frac{dI}{dt} < 0$

$$E(t) + E_L = I \cdot R = E(t) - |E_L|$$

$$\Rightarrow I = \frac{E(t)+E_L}{R}$$

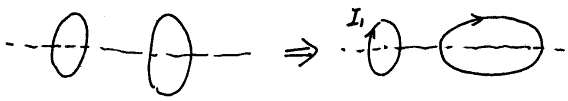
②假设电流 I 减少，自感电动势 E_L 方向与电流方向相同

$$E_L = -L\frac{dI}{dt} > 0$$

$$E(t) + E_L = IR$$

$$I = \frac{E(t)+E_L}{R}$$

3



使线圈1的电流在线圈2的磁通 $\phi_{21} = M_{21} I_1 = 0 \Rightarrow M_{21} = 0$

80

4. 长直螺线管，内充满磁介质 μ.

磁感强度：$B = \mu n I$

磁能密度 $\omega_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu n^2 I^2$

自感磁能 $W = \frac{1}{2} L I^2 = \omega_m \cdot V$

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2}\mu n^2 I^2 V$$

$$L = \mu n^2 V$$

5 长直螺线管 自感系数 $L = \mu_0 n^2 V = \mu_0 n^2 S \cdot l = \mu_0 \frac{N^2}{l} \cdot S$

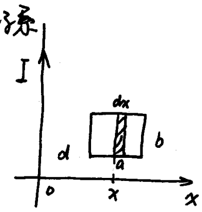
因为：$l_1 = l_2$ ，$N_1 = N_2$ ，$S_1 = \frac{1}{16} S_2$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{16}$$

自感磁能 $W = \frac{1}{2} L I^2$ ，因为 $I_1 = I_2$

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{16}.$$

6. 假设直导线通以竖直向上的电流 I，建立坐标系



电流 I 在矩形框中的磁通量

$$\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cdot b\,dx$$

$$= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right)$$

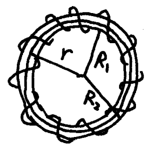
$$\phi_m = M I \Rightarrow M = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right).$$

7. 在螺绕环内部作半径为 r 的圆周作为安培回路
由于螺绕环中磁感线为同心圆.

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = NI$$

$$H\cdot 2\pi r = NI$$

$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$



$$B = \mu H = \mu_0 H = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$ 环芯材料的磁导率 $\mu = \mu_0$

如果螺绕环管的横截面很小可忽略 B 在管内的变化,

$$r \approx R_1 \approx R_2 .$$

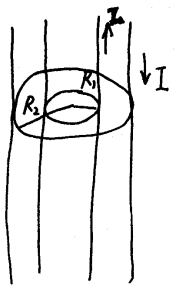
所以 $\frac{N}{2\pi r} = n$ 单位长度上的匝数

$$B = \mu_0 n I$$

$$\because \quad w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$$

$$I = \sqrt{\frac{2w_m}{\mu_0 n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2w_m}{\mu_0}} .$$

8 作半径为 r 的圆周作为安培回路。



$r<R_1$ $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \frac{I}{\pi R_1^2}\cdot \pi r^2$

$H\cdot 2\pi r = \frac{I}{R_1^2}\cdot r^2$

$H = \frac{I}{2\pi R_1^2} r$

$R_1<r<R_2$ $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$

$H\cdot 2\pi r = I$

$H = \frac{I}{2\pi r}$

$r>R_2$ $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I - I = 0$

$H\cdot 2\pi r = 0$

$H = 0$

空间磁场强度 H 的分布

$$H = \begin{cases} \frac{I}{2\pi R_1^2} r & (r<R_1) \\ \frac{I}{2\pi r} & (R_1<r<R_2) \\ 0 & (r>R_2) \end{cases}$$

空间磁感强度 B 的分布

$$B=\mu H = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r & (r<R_1) \\ \frac{\mu_r\mu_0 I}{2\pi r} & (R_1<r<R_2) \\ 0 & r>R_2 \end{cases}$$

空间磁场能量密度

$$\omega_m = \frac{B^2}{2\mu} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R_1^4} r^2 & (r<R_1) \\ \frac{\mu_r\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} & (R_1<r<R_2) \\ 0 & (r>R_2) \end{cases}$$

单位长度上的能量

$$W = \int_0^{R_1} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R_1^4} r^2 \cdot 2\pi r dr \times 1 + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_r\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}\cdot 2\pi r dr \times 1$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_r\mu_0 I^2}{4\pi} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\left(\frac{1}{4} + \mu_r \ln\frac{R_2}{R_1}\right)$$

9. 半径为 r_2，电流 $I=I_0\sin(\omega t)$ 的大圆环在环心处产生的磁感强度：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2r_2}=\frac{\mu_0 I_0\sin(\omega t)}{2r_2}$$

由于 $r_2\gg r_1$，小圆环内部近似为均匀场.

设小圆环的正绕向与大圆环中电流流向相同

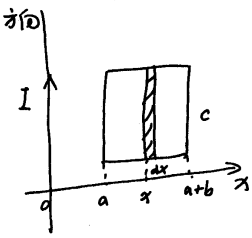
$$\Phi_m=B\cdot\pi r_1^2=\frac{\mu_0 I}{2r_2}\cdot\pi r_1^2=\frac{\mu_0 I_0\sin(\omega t)}{2r_2}\cdot\pi r_1^2$$

$$E_i=-\frac{d\Phi_m}{dt}=-\frac{\mu_0 I_0\omega\cos(\omega t)}{2r_2}\cdot\pi r_1^2$$

$$E_i=I_iR$$

$$I_i=\frac{E_i}{R}=-\frac{\mu_0\omega I_0\pi r_1^2}{2Rr_2}\cos(\omega t)$$

10. 建立坐标轴 ox，矩形框中顺时针为正方向



$$\Phi_m=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\cdot c\,dx=\frac{\mu_0 Ic}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

(1) $$M=\frac{\Phi_m}{I}=\frac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

(2) $$E_i=-M\frac{dI}{dt}=-M\cdot(-I_0\omega\sin\omega t)=\frac{\mu_0 c\omega I_0}{2\pi}\sin\omega t\ln\left(1+\frac{b}{a}\right).$$

84

